Sujet

Soit $\mathbf{M} = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ la matrice

d'adjacence d'un graphe d'ordre n, dont les sommets sont numérotés de 1 à n et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On souhaite démontrer par récurrence sur k que le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice $\mathbf{M}^k$ correspond au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j.

1. Vérifier que la propriété est vraie au rang $k = 1$.

2. Soit un entier $p \geqslant 1$ tel que le coefficient situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne de $\mathbf{M}^p$ corresponde au nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet i au sommet j.

Notons $\mathbf{M}^p = (b_{i,j}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$

et $\mathbf{M}^{p+1} = (c_{i,j}) = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$.

a. Pour tous entiers naturels i et j compris entre 1 et n, justifier que $c_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell} a_{\ell,j}$.

b. Interpréter $b_{i,\ell}$ et $a_{\ell,j}$ en termes de nombre de chaînes.

c. En déduire que $c_{i,j}$ est le nombre de chaînes de longueur $p+1$ reliant les sommets i et j.

3. Conclure.